Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2019

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za VII razred osnovne škole

1. Na kružnici su u smjeru kretanja kazaljke na satu ispisani svi prirodni brojevi od 1 do 2019. Precrtajmo najprije broj 1, zatim broj 10, pa 19, pa 28, i tako redom u istom smjeru. Koji će broj prvi biti precrtan dva puta? Koliko je brojeva u tom trenutku ostalo neprecrtano?

   Rješenje: Kako je $2019 = 9 \cdot 224 + 3$ to će u prvom obilasku biti precrtani brojevi:

   $$1 = 0 \cdot 9 + 1,\ 10 = 1 \cdot 9 + 1,\ 19 = 2 \cdot 9 + 1, \ldots, 2017 = 224 \cdot 9 + 1.$$

   U sljedećem obilasku biće precrtani brojevi:

   $$7 = 0 \cdot 9 + 7,\ 16 = 1 \cdot 9 + 7,\ 25 = 2 \cdot 9 + 7, \ldots, 2014 = 223 \cdot 9 + 7.$$

   U trećem obilaženju će biti precrtani

   $$4 = 0 \cdot 9 + 4,\ 13 = 1 \cdot 9 + 4,\ 22 = 2 \cdot 9 + 4, \ldots, 2011 = 223 \cdot 9 + 4.$$

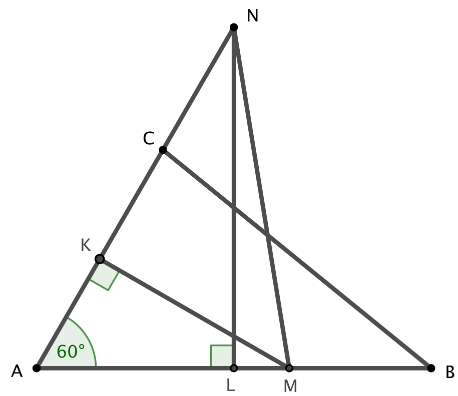
   U četvrtom obilaženju prvo ćemo precrtati broj 1 i to će biti prvi dva puta precrtan broj. Dakle, do tada je ukupno precrtano $225 + 224 + 224 + 1 = 674$. Prema tome, neprecrtanih brojeva je ostalo $2019 - 673 = 1345$.

2. Tablica 7×7 popunjava se brojevima iz skupa $\{-1, 0, 1\}$, a zatim se izračunaju zbirovi u pojedinim vrstama, kolonama i na obje dijagonale. Dokazati da, kako god popunili tablicu, među tim zbirovima postoje dva jednaka.

   Rješenje: Mogući zbirovi su brojevi iz skupa $\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Izračunatih zbirova po kolonama ima 7, po vrstama 7 i dva na dijagonalama. Dakle, ukupno 16 zbirova uzima vrijednosti iz $15-$članog skupa pa postoje bar dva jednaka zbira.

3. U trouglu ABC ugao kod tjemena A jednak je $60°$. Simetrala stranice AB siječe pravu AC u tački N, a simetrala stranice AC siječe pravu AB u tački M. Dokazati da je $|CB| = |MN|$.

Rješenje:



Označimo središte stranice AB sa L, a središte stranice AC sa K. Iz pravouglog trougla AKM sa uglovima $30°$ i $60°$ zaključujemo da je $|AK| = \frac{1}{2}|AM| = \frac{1}{2}|AC|$. Slično, iz pravouglog trougla ANL zaključujemo da je $|AL| = \frac{1}{2}|AN| = \frac{1}{2}|AB|$. Dakle, $\triangle ACB \cong \triangle AMN$ (SUS stav: $|AC| = |AM|$, $\angle BAC = \angle NAM = 60°$, $|AB| = |AN|$), odakle slijedi $|CB| = |MN|$.

4. Odrediti sve petocifrene brojeve koji se završavaju sa 17, djeljivi su sa 17 i čiji je zbir cifara jednak 17.

Rješenje: Neka su traženi brojevi oblika $\overline{abc17}$. Kako 17 dijeli $\overline{abc17} = 100 \cdot \overline{abc} + 17$ zaključujemo da 17 dijeli i $\overline{abc}$. Zbir cifara je 17, tj. $a+b+c+1+7 = 17$ pa je $a+b+c = 9$. Odavde slijedi da 9 dijeli $\overline{abc}$. Brojevi 9 i 17 su uzajamno prosti i dijele broj $\overline{abc}$ pa i njihov proizvod 153 dijeli broj $\overline{abc}$. Dakle $\overline{abc} = 153 \cdot k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Direktnom provjerom nalazimo sve moguće trocifrene brojeve koji imaju navedena svojstva: 153, 306 i 612, pa traženi petocifreni brojevi su $15317, 30617$ i 61217.