Prirodno-matematički fakultet

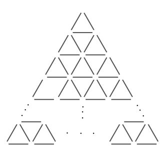
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2019

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za IX razred osnovne škole

1. Viktor je od šibica napravio veliki jednakostranični trougao čije se stranice sastoje od po k šibica. Zatim ga je, postavljajući šibice unutar njega, podijelio na male jednakostranične trouglove čije su stranice šibice, kao na slici:



Aleksa je, na isti način, napravio veliki jednakostranični trougao čija stranica ima 3 šibice više od Viktorovog prvog, velikog trougla, a zatim ga podijelio na male jednakostranične trouglove čije su stranice šibice. Aleksa kaže da mu je bilo potrebno 111 šibica više nego Viktoru, ali Viktor se sa time ne slaže. Ko je u pravu, Aleksa ili Viktor?

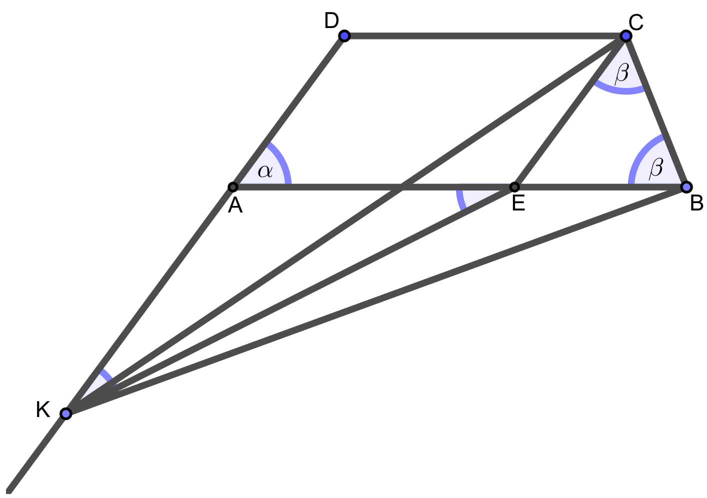
Rješenje: Pogledajmo prvo koliko se šibica troši pri ,,dogradnji" jednog reda malih jednakostranočnih trouglova, posmatrano od vrha velikog trougla naniže. U prvom redu, na samom vrhu, je jedan trougao i tačno 3 šibice. U sljedećem, drugom redu, su 3 jednakostranična trougla i za dogradnju ovog reda potrošeno je $2 \cdot 3 = 6$ šibica. U trećem redu je $3 \cdot 3 = 9$ šibica, ..., u k-tom redu je $3k$ šibica. Aleksina figura nastaje iz Viktorove dodavanjem tri nova reda, za šta je potrebno još $3(k+1) + 3(k+2) + 3(k+3) = 9(k+2)$ šibica. Kako broj 111 nije djeljiv sa 9, u pravu je Viktor.

□

2. U trapezu $ABCD$ važi $\angle BCD = \angle DAB + \angle ABC$. Na produženju duži DA kroz tjeme A izabrana je tačka K takva da je $AK = CD$. Dokazati da je $BK = CK$.

Rješenje: Neka je tačka E presjek stranice AB i prave koja sadrži tačku C i paralelna je

stranici DA. Četvorougao $AECD$ je paralelogram, a kako je $\angle BCD = \angle DAB + \angle ABC$, vidimo da je $\angle BCE = \angle ABC$, odnosno da je trougao $\triangle EBC$ jednakokraki, pa je $EB = EC$. Dalje, kako je $AK = CD = AE$, to je trougao $\triangle AKE$ jednakokraki, pa je $\angle AKE = \angle KEA$. Dodatno, $\angle EAK = \angle CDA$ (F-uglovi). Pošto je $\angle KEC = \angle KEA + \angle AEC = \angle KEA + \angle CDA$ i $\angle BEK = \angle EAK + \angle AKE = \angle KEA + \angle CDA$ (kao spoljašnji ugao trougla $\triangle AKE$), zaključujemo da je $\angle KEC = \angle BEK$.
Posmatrajmo trouglove $\triangle KEC$ i $\triangle KEB$. Kako je $EB = EC$, $\angle KEC = \angle BEK$ i kako je EK zajednička stranica za ova dva trougla, po stavu SUS zaključujemo da su ovi trouglovi podudarni, pa je $BK = CK$. $\square$



3. Da li postoje prirodni brojevi a i b takvi da se vrijednost izraza $ab(a+b)$ zapisuje današnjim datumom: 11. maj 2019. godine, to jeste takvi da važi:

$$ab(a+b) = 11052019.$$

Rješenje: Pretpostavimo da postoje ovakvi brojevi a i b. Broj 11052019 nije djeljiv sa 3, pa ni jedan od brojeva a, b ili $a+b$ nije djeljiv sa 3. Tada su a i b prirodni brojevi koji oba pri dijeljenju sa 3 daju isti ostatak: 1 ili 2.

Neka je $a = 3k + 1$ i $b = 3s + 1$, za neke $k, s \in N$. Tada je

$$ab(a+b) = (9ks+3k+3s+1)[3(k+s)+2] = 3(k+s)(9ks+3k+3s+1)+6(3ks+k+s)+2,$$

pa $ab(a+b)$ pri dijeljenju sa 3 daje ostatak 2, dok 11052019 pri dijeljenju sa 3 daje ostatak 1.

Neka je sada $a = 3k + 2$ i $b = 3s + 2$, za neke $k, s \in N$. Tada je

$$ab(a + b) = (9ks + 6k + 6s + 4)[3(k + s) + 4] = 45ks(k + s) + 36ks + 36(k + s) + 16,$$

pa $ab(a+b)$ pri dijeljenju sa 9 daje ostatak 7, dok 11052019 pri dijeljenju sa 9 daje ostatak 1.

□

4. Gledaoci ocjenjuju film ocjenama od 0 do 10. U svakom trenutku vremena rejting filma se dobija kao srednja vrijednost svih ocjena pristiglih do tog trenutka. U momentu T je rejting filma bio cio broj, a nakon toga se sa svakim novim pristiglim glasom smanjivao za 1. Koliko je najviše glasova moglo stići nakon momenta T?

   Rješenje: Neka je do momenta T glasalo n gledalaca, i neka je x rejting filma u tom trenutku. Suma glasova gledalaca u trenutku T je nx. Nakon što pristigne sledeći glas, rejting se smanjuje za 1, pa je tada suma svih glasova $nx+y = (n+1)(x-1)$. Odavde je $y = x-n-1$. Kako je najveća vrijednost rejtinga x jednaka 10, a najmanja vrijednost n jednaka 1, to je najveća vrijednost koju y može uzeti 8. U svakom sledećem koraku se n poveća za 1, a x smanji za 1, pa se y smanjuje za 2. Dakle, u sledećem koraku y uzima vrijednost 6, pa 4, pa 2, pa 0. Kako ocjena filma ne može biti negativna, to je broj koraka najviše 5. Dakle, nakon momenta T je najviše moglo stići 5 glasova. □

Vrijeme rada: 180 minuta.
Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.
Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.