Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2019

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za VIII razred osnovne škole

1. Svaka od kateta pravougalog trougla uvećana je za po $1\,cm$. Da li se njegova hipotenuza mogla uvećati za više od $\sqrt{2}\,cm$?

Rješenje: Označimo dužine kateta, prije uvećanja, sa x i y i pretpostavimo da se po uvećanju ovih dužina dužina hipotenuze uvećala za više od $\sqrt{2}\,cm$. Tada važi sljedeći niz nejednakosti:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} > \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2} \quad & \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2 > x^2+y^2+2+2\sqrt{2(x^2+y^2)} \\
& \Leftrightarrow 2(x+y+1) > 2(1+\sqrt{2(x^2+y^2)}) \\
& \Leftrightarrow x+y > \sqrt{2(x^2+y^2)} \\
& \Leftrightarrow x^2+y^2+2xy > 2x^2+2y^2 \\
& \Leftrightarrow (x-y)^2 < 0,
\end{aligned}
$$

što nije tačno. $\square$

2. Petocifreni broj x počinje cifrom 4, a završava se cifrom 7, a petocifreni broj y počinje cifrom 9, a završava se cifrom 3. Brojevi x i y imaju zajednički petocifreni djelilac. Dokazati da je broj $2y-x$ djeljiv sa 11.

Rješenje: Neka je $x = az$, $y = bz$, gdje je z zajednički petocifreni djelilac brojeva x i y, pa a i b moraju biti neparni brojevi, i mora važiti $a < b$, $a \leq 4$, $b \leq 9$. Odavde je $a = 1$ ili $a = 3$. Ako je $a = 1$, to je $z = x$, pa je $y = bx$ i $b \geq 3$. Tada je $y \geq 3x > 120000$, što je nemoguće jer je y petocifreni broj. Dakle, $a = 3$.
Pošto je $a = 3$, a poslednja cifra broja x je 7, zaključujemo da poslednja cifra broja z mora biti 9. Kako je poslednja cifra broja y jednaka 3, zaključujemo da je $b = 7$. Dobijamo da je

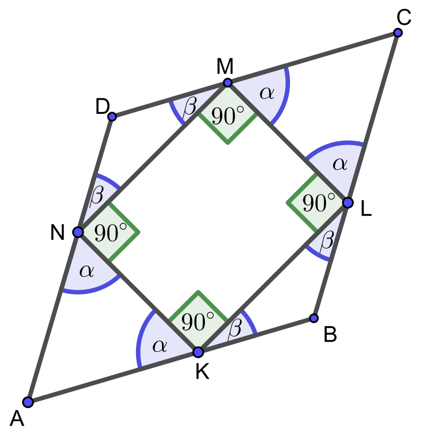
$y = 7z$.

Dalje je $2y - x = 14z - 3z = 11z$, pa je broj $2y - x$ djeljiv sa 11. $\square$

3. Na stranicama AB, BC, CD i DA četvorougla $ABCD$ izabrane su redom tačke K, L, M i N takve da je $AK = AN$, $BK = BL$, $CL = CM$ i $DM = DN$. Četvorougao $KLMN$ je pravougaonik. Dokazati da je četvorougao $ABCD$ romb.

Rješenje: Pošto je $AK = AN$, $BK = BL$, $CL = CM$ i $DM = DN$, zaključujemo da su trouglovi $\triangle AKN$, $\triangle BKL$, $\triangle CLM$ i $\triangle DMN$ jednakokraki. Uvedimo oznake $\angle AKN = \angle ANK = \alpha$ i $\angle BKL = \angle BLK = \beta$. Pošto je $\angle NKL = 90°$, zaključujemo da je $\alpha + \beta = 90°$. Dalje, pošto je i ugao $\angle KLM$ prav, to je $\beta + \angle MLC = 90°$, tj. $\angle MLC = \angle LMC = \alpha$. Analogno zaključujemo da je $\angle DMN = \angle DNM = \beta$.

Dakle, pošto je četvorougao $KLMN$ pravougaonik, to je $KN = LM$ i $KL = MN$. Zaključujemo da su trouglovi $\triangle AKN$ i $\triangle BKL$ podudarni trouglovima $\triangle CLM$ i $\triangle DMN$, respektivno. Iz toga slijedi da je $AB = AK + KB = CM + MD = CD$ i $AD = AN + ND = CL + LB = BC$, pa je četvorougao $ABCD$ romb. $\square$



4. Na poljima šahovske table raspoređena su zrna pirinča. Broj zrna na svaka dva susjedna polja se razlikuje za 1. Dva polja su susjedna ako imaju zajedničku stranicu. Poznato je da se na jednom od 64 polja nalaze 3, a na nekom od ostalih 63 polja 17 zrna. Pijetao jede zrna sa

glavne dijagonale čija su sva polja bijela, a kokoška sa druge. Ko će pojesti više, pijetao ili kokoška? (Glavnim dijagonalama nazivaju se dijagonale koje sadrže po 8 polja ove table.)

Rješenje: Kako se broj zrna na svaka dva susjedna polja razlikuje za 1, razlika u broju zrna ma koja dva polja iste koloni je najviše 7. Isto važi i za vrste. Kako je $17 - 3 = 14$, polja sa po 3 i 17 zrna su u dijagonalno suprotnim ćoškovima table. Određenosti radi, pretpostavimo da su 3 zrna u donjem lijevom, a 17 zrna u gornjem desnom ćošku. Tada se brojevi u prvoj koloni povećavaju od poslednje vrste naviše ka prvoj: 3,4,5,6,7,8,9,10, a brojevi prve vrste su 10,11,12,13,14,15,16,17, redom od prve ka osmoj koloni. Dalje, kada god treba popuniti prazno polje čiji su „dijagonalni" susjedi već popunjeni brojevima $i - 1$ i $i + 1$, kao na slici, nemamo izbora, jer se na njemu mora naći tačno i zrna :

i	$i+1$
$i-1$	

$\Rightarrow$

i	$i+1$
$i-1$	i

Odavde zaključujemo da je raspored zrna po tabli sljedeći:

10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10

Dakle, ukupan broj zrna na jednoj glavnoj dijagonali je $8 \cdot 10 = 80$, a na drugoj $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 80$, pa će pijetao i kokoška pojesti isti broj zrna pirinča.

□

Vrijeme rada: 180 minuta.
Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.
Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.